BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

RİYAZİYYAT

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ПРИ ЧАСТИЧНО ДЕТЕРМИНИРОВАННОМ ГРАНИЧНОМ РЕЖИМЕ

Ю.А.МАМЕДОВ

Бакинский Государственный Университет

Изучение динамических процессов при частично детерминированном граничном режиме, т.е. когда режим на части границы предопределяется режимом на этой или другой части границы в предыдущие моменты времени, имеет важное прикладное значение. Математическая постановка и решение соответствующих задач нетрадиционны и интересны. Ниже рассматривается одна такая задача из теории теплопроводности, которая решается методом контурного интеграла.

Рассмотрим смешанную задачу

$$u_t = u_{xx},\ \ t>0,\ 0<x<1, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &u(0,x)=\varphi(x), \qquad x\in(0,1),\\ &u_x(t,0)=0, \qquad t>0\\ &u(t,1)=0, \qquad 0<t\le\omega \end{aligned}$$

$$\alpha u(t,0)+\beta u(t+\omega,1)=0,\ \ t>\omega \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ – заданная, а $u=u(t,x)$ – искомая функции, $\alpha\neq 0, \beta\neq 0, \omega>0$ – постоянные.

Соответствующая спектральная задача, которая получается применением преобразования Лапласа, имеет вид:

$$y''-\lambda^2 y=-\varphi(x), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\alpha y(0,\lambda)+\beta e^{\lambda^2\omega}y(1,\lambda)=0,\\ &y'(0,\lambda)=0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\lambda=\lambda_1+i\lambda$ – комплексный параметр, $y=y(x,\lambda)$ искомая функция.

При всех значениях λ таких, что

$$\Delta(\lambda)\equiv-\lambda(2\alpha+\beta e^{\lambda^2\omega-\lambda}+\beta e^{\lambda^2\omega+\lambda})\neq 0$$

задача (3), (4) имеет единственное решение

$$y(x,\lambda,\varphi)=-\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)d\xi \tag{5}$$

где $G(x,\xi,\lambda)$ – функция Грина, которая представляется формулами

$$G(x,\xi,\lambda)=G_0(x,\xi,\lambda)+G_1(x,\xi,\lambda),$$

$$G_0(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} g_0(x,\xi,\lambda), & \text{при} \quad 0\le\xi\le x\le 1,\\ \quad 0, & \text{при} \quad 0\le x<\xi\le 1,\end{cases} \tag{6}$$

$$G_1(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} g_1(x,\xi,\lambda), & \text{при} \quad 0\le\xi\le x\le 1,\\ g_1(\xi,x,\lambda), & \text{при} \quad 0\le x<\xi\le 1,\end{cases}$$

$t>0,\ 0\le x<1$

$$g_1(x,\xi,\lambda)=\frac{\beta}{2\Delta(\lambda)}e^{\lambda^2\omega}\left[e^{\lambda(1-x)}-e^{-\lambda(1-x)}\right]\left(e^{\lambda\xi}+e^{-\lambda\xi}\right)$$

Примем следующие обозначения:

$$D_\delta=D_\delta(R)=\left\{\lambda:\ |\lambda|\ge R, \lambda_1>0, |\lambda_2|\le\sqrt{\lambda_1^2+\frac{\delta}{\omega}\lambda_1}\right\},$$

$$S_\delta=S_\delta(R)=\{\lambda:\ |\lambda|=R, \lambda\in D_\delta\}\cup\left\{\lambda:\ |\lambda_2|=\sqrt{\lambda_1^2+\frac{\delta}{\omega}\lambda_1}, \lambda\in D_\delta\right\} \tag{7}$$

где $R>0,\ \delta\ge 0$ и положительным на S_δ считаем направление, соответствующее возрастанию λ_2. Очевидно, что

$$D_\delta(R_1)\supset D_\delta(R_2),\ D_{\delta_1}(R)\subset D_{\delta_2}(R)$$

при $R_1<R_2$ и $\delta_1<\delta_2$.

Имеет место

Теорема. Пусть $\varphi(x)\in C^2[0,\ 1]$, $\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi(1)=0$. Тогда задача (1), (2) имеет решение

$$u(t,x)\in C^{1,2}(t>0,0<x<1)\cap C^{0,1}(t>0,0\le x<1)\cap C(t\ge 0,0\le x\le 1)$$

представимое формулой

$$u(t,x)=\begin{cases} \upsilon(t,x), & \text{при} \quad t>0,\ 0\le x\le 1\\ \varphi(x), & \text{при} \quad t=0,\ 0\le x\le 1\end{cases} \tag{8}$$

где

$$\upsilon(t,x)=\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int_{S_0}e^{\lambda^2 t}\,y(x,\ \lambda,\ \varphi)d\lambda \tag{9}$$

Доказательство: Представляя функцию $\Delta(\lambda)$ в виде

$$\Delta(\lambda)=-\beta\lambda e^{\lambda^2\omega+\lambda}\left(1+e^{-2\lambda}+\frac{2\alpha}{\beta}e^{-\lambda^2\omega-\lambda}\right),$$

из (7) заметим, что при $\lambda\in D_\delta(R),\ \delta<1$ *и* $R>\frac{\delta}{\omega}$ справедливы оценки

$$\lambda_1>\frac{1}{2}R,\ -\mathrm{Re}(\lambda^2\omega+\lambda)\le-(1-\delta)\lambda_1<\frac{1-\delta}{2}R$$

и следовательно, при больших R

$$\left|e^{-2\lambda}\right| < \frac{1}{4}, \left|\frac{2\alpha}{\beta} e^{-\lambda^2\omega-\lambda}\right| < \frac{1}{4}$$

т.е.

$$\left|\Delta(\lambda)\right| \geq \frac{1}{2}|\beta||\lambda|\left|e^{\lambda^2\omega+\lambda}\right| \tag{10}$$

Из этой оценки следует, что функция $y(x, \lambda, h)$ аналитична по λ в области $D_\delta(R)$, при $h(x) \in C[0,\ 1]$, $\delta < 1$ и R – достаточно большом.

При условиях теоремы, имеем очевидную формулу

$$y(x, \lambda, \varphi) = \frac{1}{\lambda^2}\varphi(x) + \frac{1}{\lambda^2} y(x, \lambda, \varphi''), \tag{11}$$

а в связи с (5), (6) имеем:

$$y(x, \lambda, \varphi'') = y_0(x, \lambda, \varphi'') + y_1(x, \lambda, \varphi''),$$

где

$$y_j(x, \lambda, \varphi'') = \int_0^1 G_j(x, \xi, \lambda)\varphi''(\xi)d\xi \quad (j = 0,\ 1).$$

Согласно с (6) и (10), при $\lambda \in D_\delta(R)$, $\delta < 1$ и R-достаточно большом получаем оценки

$$\left|\frac{d^k y_0(x, \lambda, \varphi'')}{dx^k}\right| \leq C|\lambda|^{k-2}\left|e^{-\lambda^2\omega}\right|e^{(x-1)c|\lambda|},$$

$$\left|\frac{d^k y_1(x, \lambda, \varphi'')}{dx^k}\right| \leq C|\lambda|^{k-2} \quad (k = 0,\ 1,\ 2) \tag{12}$$

где C, $c > 0$.

В силу (11) формулу (9) представим в виде

$$\upsilon(t, x) = \frac{\varphi(x)}{\pi\sqrt{-1}}\int_{S_0}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda}d\lambda + \int_{S_0}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda} y(x, \lambda, \varphi'')d\lambda \tag{13}$$

Легко видеть, что

$$\int_{S_0}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda}d\lambda = \frac{1}{2}\left(\int_{S_0}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda}d\lambda + \int_{S_0^-}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda}d\lambda\right), \tag{14}$$

где S_0^- – контур, симметричный с S_0 относительно мнимой оси, интегрирование по которому проводится в направлении убывания λ_2.

С другой стороны, оценивая следующие интегралы по дугам

$$l_n^j = \left\{\lambda:\quad \lambda = ne^{i\theta}, \left(j - \frac{3}{4}\right)\pi \leq \theta \leq \left(j - \frac{1}{4}\right)\pi\right\}$$

$j = 1, 2;\ n = 1, 2, 3, \ldots,$ при $t > 0$ получаем:

$$\left|\int\limits_{l_n^j}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda}d\lambda\right|=\left|\int\limits_{(j-3/4)\pi}^{(j-1/4)\pi}e^{tn^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}d\theta\right|\le\int\limits_{(j-3/4)}^{(j-1/4)\pi}e^{tn^2\cos 2\theta}d\theta\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int\limits_{(2j-3/2)\pi}^{(2j-1)\pi}e^{tn^2(4j-3-2\xi/\pi)}d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{(2j-1)\pi}^{(2j-1/2)\pi}e^{tn^2(2\xi/\pi+1-4j)}d\xi=\frac{\pi}{2tn^2}(1-e^{-tn^2}).$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{l_n^j}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda}d\lambda=0\quad(j=1,\,2).$$

Тогда из (14) заключаем

$$\int\limits_{S_0}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda}d\lambda=\pi i \tag{15}$$

и тем самым формула (13) примет вид:

$$\upsilon(t,\,x)=\varphi(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{S_0}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda}y(x,\,\lambda,\,\varphi'')d\lambda\,. \tag{16}$$

В связи с оценками (12) и тем, что на далеких частях контура S_0 (при $|\lambda|>R$)

$$|e^{\lambda^2 t}|=|e^{-\lambda^2\omega}|=1,$$

интеграл в правой части формулы (16) и интеграл, получаемый от него дифференцированием по x при каждом $t>0$, сходятся равномерно по $x\in[0,\,1]$. Поэтому

$$\upsilon(t,x)\in C^{0,1}(t>0,\;0\le x\le 1) \tag{17}$$

и

$$\upsilon_x(t,\,0)=0,\;\;\alpha\upsilon(t,\,0)+\beta\upsilon(t+\omega,\,1)=0,$$

при $t>0$ в силу (4) и условий теоремы. Далее с учетом оценки (12), имеем:

$$\lim_{t\to+0}\upsilon(t,x)=\varphi(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{S_0}\frac{1}{\lambda}y(x,\lambda,\varphi'')d\lambda$$

и поскольку $y(x,\lambda,\varphi'')$ аналитична в области D_0, а на дуге

$$l_n^3=\left\{\lambda:\quad\lambda=ne^{i\theta},-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$$

справедливы соотношения

$$\left|e^{-\lambda^2\omega}\right|\le 1,\;\lim_{n\to\infty}\left|\int\limits_{l_n^3}\frac{1}{\lambda}y(x,\lambda,\varphi'')d\lambda\right|\le\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{C}{n^2}d\theta=\lim_{n\to\infty}\frac{C\pi}{2n^2}=0,$$

заключаем, что

$$\lim_{t\to+0}\upsilon(t,x)=\varphi(x). \tag{18}$$

Из (8), (17) и (18) следует, что $u(t,\,x)\in C$ $(t\ge 0,\;0\le x\le 1)$. Наконец, в силу (6) и условий теоремы, из (16) получаем:

$$\upsilon(t,1)=\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int_{S_0}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda}\cdot y_0(1,\lambda,\varphi'')d\lambda,$$

откуда, с учетом оценки (12) и того, что при $t\le\omega$ и $\lambda\in D_0$

$$\left|e^{\lambda^2(t-\omega)}\right|\le 1,$$

как и выше, пользуясь аналитичностью $y_0(1,\lambda,\varphi'')$ имеем:

$$\upsilon(t,1)=0,$$

при $t\le\omega$.

Теперь докажем, что $\upsilon(t,x)\in C^{1,2}\,(t>0,\ 0\le x<1)$. В силу формулы (16), достаточно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ интегралы

$$J_{j1}=\int_{S_0}\lambda e^{\lambda^2 t}\,y_j(x,\lambda,\varphi'')d\lambda,$$

$$J_{j2}=\int_{S_0}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda}\frac{d^2}{dx^2}y_j(x,\lambda,\varphi'')d\lambda,\ (j=0,1)$$

сходятся равномерно по t и t,x при $t\ge\varepsilon,\ 0\le x\le 1-\varepsilon$.

Из первой из оценок (12) следует, что при таких t,x и $\lambda\in S_0\,(|\lambda|>R)$ справедливы

$$\left|e^{\lambda^2 t}\right|=1 \text{ и } \left|\frac{d^k y_0(x,\lambda,\varphi'')}{dx^k}\right|\le C|\lambda|^{k-2}e^{-\varepsilon c|\lambda|}\quad(k=0,1,2),$$

откуда следует равномерная сходимость интегралов J_{01}, J_{02}. Для доказательства равномерной сходимости интегралов J_{11}, J_{12} зафиксируем число $\delta\,(0<\delta<1)$ и рассмотрим дуги l_n^4 и l_n^5 окружности $|\lambda|=n,\ (n>R)$, соединяющие соответственно точки $\frac{1+i}{\sqrt{2}}n$ и $\frac{1-i}{\sqrt{2}}n$ ближайшими (по окружности) точками гиперболы S_δ:

$$l_n^4=\left\{\lambda:\ \lambda=ne^{i\theta},\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\theta_{0n}\right\},\ l_n^5=\left\{\lambda:\ \lambda=ne^{i\theta},\ -\theta_{0n}\le\theta\le-\frac{\pi}{4}\right\}$$

где θ_{0n} определяется из соотношений:

$$\cos 2\theta_0+\frac{\delta}{n\omega}\cos\theta_0=0,\quad \cos\theta_0>\frac{1}{\sqrt{2}}\tag{19}$$

Очевидно, что $l_n^j\subset D_\delta\,(j=4,5)$ и при $t\ge\varepsilon,\ \lambda\in l_n^j$ имеем:

$$\left|e^{\lambda^2 t}\right|=e^{tn^2\cos 2\theta}\le e^{\varepsilon n^2\cos 2\theta}$$

Тогда, с учетом оценки (12), получаем:

$$\left|\int_{l_n^j} \lambda e^{\lambda^2 t} y_1(x,\lambda,\varphi'')d\lambda\right| \le C\left|\int_{(-1)^j\frac{\pi}{4}}^{(-1)^j\theta_0} e^{\varepsilon n^2\cos 2\theta}d\theta\right| \le$$

$$\le \frac{C}{2}\left|\int_{(-1)^j\frac{\pi}{4}}^{(-1)^j 2\theta_{0n}} e^{\varepsilon n^2\cdot\frac{(-1)^j\xi-\frac{\pi}{2}}{2\theta_{on}-\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta_{on}}d\xi\right| = \frac{C\left(\theta_{on}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\varepsilon n^2\cos 2\theta_{on}}\left(e^{\varepsilon n^2\cos 2\theta_{on}}-1\right). \qquad (20)$$

Из (19) следует, что $\theta_{on}\to\dfrac{\pi}{4}$, при $n\to\infty$ и кроме того

$$\lim_{n\to\infty} n\cos 2\theta_{on} = -\frac{\delta}{\sqrt{2}\,\omega}, \qquad \lim_{n\to\infty} n^2\cos 2\theta_{on} = -\infty$$

Поэтому из (20) заключаем:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{l_n^j}\lambda e^{\lambda^2 t}y_1(x,\ \lambda,\ \varphi'')d\lambda = 0\ , \qquad (21)$$

при $j=4,\ 5,\ t\ge\varepsilon,\ 0\le x\le 1$. Аналогично получается и равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{l_n^j}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda}\frac{d^2}{dx^2}y_1(x,\ \lambda,\ \varphi'')d\lambda = 0 \quad (j=4,\ 5)\,. \qquad (22)$$

Из равенства (21) и (22), с учетом аналитичности функции $y_1(x,\ \lambda,\ \varphi'')$ в D_δ, получаем

$$J_{11} = \int_{S_\delta}\lambda e^{\lambda^2 t}y_1(x,\ \lambda,\ \varphi'')d\lambda,\ J_{12} = \int_{S_\delta}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda}\frac{d^2}{dx^2}y_1(x,\ \lambda,\ \varphi'')d\lambda\,, \qquad (23)$$

Но на далеких частях контура S_δ имеем (см. (7)):

$$\left|e^{\lambda^2 t}\right| = e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda^2} = e^{t\,\mathrm{Re}\left(\lambda^2+\frac{\delta}{\omega}\lambda\right)}\cdot e^{-\frac{\delta t}{\omega}\mathrm{Re}\,\lambda} = e^{-\frac{\delta t}{\omega}\mathrm{Re}\,\lambda} \le e^{-\frac{\delta\varepsilon}{\omega}c|\lambda|} \quad (c>0)\,.$$

Эта оценка и оценки (13) показывают, что интегралы (23) сходятся равномерно относительно t и x при $t\ge\varepsilon$, $0\le x\le 1$.

Таким образом, интегралы

$$\int_{S_0}\lambda y(x,\ \lambda,\ \varphi'')d\lambda, \qquad \int_{S_0}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda}\frac{d^2}{dx^2}y(x,\ \lambda,\ \varphi'')d\lambda$$

сходятся равномерно по t и x при $t\ge\varepsilon$, $0\le x\le 1-\varepsilon$ при любом $\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$. Это означает, что $\upsilon(t,\ x)\in C^{1,\,2}(t>0,\ 0\le x<1)$ и операции $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ можно перенести под знак интеграла в (16), при $t>0,\ 0\le x<1$, т.е.

$$\upsilon_t-\upsilon_{xx} = -\varphi''(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int_{S_0}\frac{e^{\lambda^2 t}}{\lambda}\left[\lambda^2 y(x,\ \lambda,\ \varphi'')-\frac{d^2}{dx^2}y(x,\ \lambda,\ \varphi'')\right]d\lambda = 0,$$

в связи с равенством (15). Теорема доказана.

Заметим, что задачу (1), (2) можно было бы решить и следующим образом: Сначала по данным $u(0,x)=\varphi(x)$, $u_x(t,0)=0$, $u(t,1)=0$ $(0 \le t \le \omega)$ можно определить $u(t,x)$ в прямоугольнике $[0,\omega]\times[0,1]$, а затем находя $u(t,0)$ при $0 \le t \le \omega$ и $u(\omega,x)=\varphi_1(x)$ при $0 \le x \le 1$ и определяя с помощью равенства $\alpha u(t,0)+\beta u(t+\omega,1)=0$ значение $u(t,1)=\psi(t)$, при $\omega \le t \le 2\omega$ решить задачу $u_t=u_{xx}$, $u(\omega,x)=\varphi_1(x)$, $u_x(t,0)=0$, $u(t,1)=\psi(t)$ в прямоугольнике $[\omega,2\omega]\times[0,1]$ и т.д. Однако ясно, что такой подход хотя и позволяет получить утверждение о существовании решения, но не может привести к единой формуле для его определения в полуполосе $[0,\infty)\times[0,1]$. И кроме того, приведенная в статье схема позволяет решить и задачи, которые не разбиваются на решения таких частных задач, что мы покажем в следующих статьях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла. М.: «Наука», 1964, 462с.

QİSMƏN DETERMİNİK SƏRHƏD REJİMİNDƏ BİR İSTİLİKKEÇİRMƏ MƏSƏLƏSİNİN RİYAZİ QOYULUŞU VƏ HƏLLİ

Y.Ə.MƏMMƏDOV

ANNOTASİYA

Qismən determinik sərhəd rejimində dinamik proseslərin tədqiqi mühüm tətbiqi əhəmiyyət kəsb edir. Belə məsələlərin riyazi qoyuluşu və həlli də ənənəvi deyil və xeyli maraqlıdır. Məqalədə sərhəddin bir hissəsində temperaturun digər hissənin daha əvvəlki vaxtda temperaturundan asılı olduğu bir istilikkeçirmə prosesini modelləşdirən qarışıq məsələ kontur inteqralı üsulu ilə həll edilir. Qarışıq məsələnin həllinin varlığı isbat olunur və həll üçün analitik ifadə tapılır.

MATHEMATICAL STATEMENT & SOLUTION OF ONE HEAT PROBLEM AT PARTIALLY DETERMINED BOUNDARY REJIME

Yu.A.MAMEDOV

ABSTRACT

The investigation of dynamic processes has an important applied meaning at partially determinated boundary rejime. The mathematical statement & solution of corresponding problems are non-traditional & interesting. In the present paper one mixed problem is investigated, modelling the heat process when the temperature of one part of the boundary is connected with the temperature of another part at previous moment of time. The existence of solution is proved by the method of contour integral & the analytical representation of it is obtained.